Epreuve de

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les parties I et II sont indépendantes.
La partie III peut-être abordée en admettant les résultats - quand il y a lieu - des parties précédentes.
De nombreuses questions peuvent être traitées dans chaque partie en admettant les résultats des questions précédentes.

PREMIERE PARTIE

On rappelle qu'une suite de nombres réels est une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$. Si u est une suite de réels, on notera $u(n)$ sa valeur au point $n \in \mathbf{N}$. Si u et v sont deux suites de réels, leur somme $w = u + v$ est une suite de réels définie par :

$$\text{(i)} \qquad \forall\, n \in \mathbf{N} \ : w(n) = u(n) + v(n)$$

Si u est une suite de réels et λ un nombre réel, leur produit λu est une suite de réels définie par :

$$\text{(ii)} \qquad \forall\, n \in \mathbf{N} \ : (\lambda u)\,(n) = \lambda . u\,(n)$$

A chaque nombre réel α, positif ou nul, on associe l'ensemble $\mathbb{E}_\alpha$ des suites u de nombre réels telles que la série de terme général $(n+1)^\alpha\, u(n)$ soit absolument convergente. Si u appartient à $\mathbb{E}_\alpha$, on pose :

$$N\alpha(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^\alpha |u(n)|$$

On définit sur l'ensemble des suites de réels, une loi de composition interne notée Δ, par la formule :

$$\text{(iii)} \qquad \forall\, n \in \mathbf{N} \ : (u \Delta v)\,(n) = \sum_{k=0}^{n} u(k) v(n-k)$$

1) Montrer que $\mathbb{E}_\alpha$ muni des opérations (i) et (ii) est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, et que N_α est une norme sur $\mathbb{E}_\alpha$. Quelle relation existe-t-il entre $\mathbb{E}_\alpha$ et $\mathbb{E}_\beta$ si $0 \leq \alpha < \beta$?

2) Pour chacune des suites suivantes, préciser l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles la suite appartient à $\mathbb{E}_\alpha$.

a : $u(n) = a^n$; $a \in \mathbb{R}$

b : $v(n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n^\beta)}$; $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$

c: $w(n) = 1 - \left(\frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}\right)^n$

3) Montrer que $\mathbb{E}_\alpha$ muni des opérations (i), (ii) et (iii), est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative. Montrer que si u et v sont dans $\mathbb{E}_\alpha$, $u \Delta v$ est dans $\mathbb{E}_\alpha$, et de plus :

$$N_\alpha (u \Delta v) \leq N_\alpha (u) \, N_\alpha (v)$$

La loi Δ est-elle associative ?

4) Soit $\{u_p\}\ p \in \mathbb{N}$, une suite d'éléments de $\mathbb{E}_\alpha$ telle que la série de terme général $N_\alpha (u_p)$ soit convergente. Montrer que la série de terme général u_p est convergente dans $\mathbb{E}_\alpha$ muni de la norme N_α.

DEUXIEME PARTIE

Soit r un réel de]0,1[. On lui associe la fonction réelle D_r définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow D_r(x) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(x) + r^2}$$

1) a : Etudier les variations de D_r sur $[-\pi, \pi]$ et en donner une représentation graphique.

b : Calculer : $\int_0^\pi D_r(x)dx$

2) *a :* Montrer que pour tout $x \in]0, \pi]$ on a :

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ r \in]0,1[}} D_r(x) = 0$$

b: Soit $\varepsilon \in]0, \pi[$. Montrer que quand r tend vers 1 dans $]0,1[$, $D_r(x)$ tend uniformément vers 0 sur $[\varepsilon, \pi]$. Calculer :

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ r \in]0,1[}} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} D_r(x)dx$$

c: Soit f une fonction réelle continue sur $[0, \pi]$. Etablir :

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ r \in]0,1[}} \int_{0}^{\pi} f(x)D_r(x)dx = \pi f(0)$$

On pourra d'abord traiter le cas où $f(0)=0$.

d: Soit f une fonction réelle continue sur $[0, \pi]$ et x un réel de $[-\pi, \pi]$. Calculer en utilisant les résultats précédants:

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ r \in]0,1[}} \int_{0}^{\pi} f(t)D_r(t-x)dt$$

On distinguera selon les valeurs de x.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner une relation entre $D_r(x)$ et le nombre $\dfrac{1+re^{ix}}{1-re^{ix}}$ (où i est le complexe vérifiant $i^2 = -1$).

En déduire un développement en série de D_r de la forme :

$$D_r(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n \cos(nx)$$

où les α_n sont des constantes que l'on déterminera.

Retrouver la valeur de l'intégrale $\int_0^{\pi} D_r(x)dx$.

4) Soit f une fonction continue sur $[0, \pi]$. On lui associe la suite réelle u définie par :

$$(1)\quad \begin{cases} u(0) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx \\ et \\ u(n) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx\,, \quad pour\ n \geq 1 \end{cases}$$

a : Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t)[D_r(t-x)+D_r(t+x)]dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)r^n\cos(nx)$$

b : Montrer de plus que si la série de terme général $u(n)$ est absolument convergente, on a pour tout $x \in [0, \pi]$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\cos(nx)$$

TROISIEME PARTIE

On reprend les notations de la première partie.

A tout élément $u \in \mathbb{E}_0$, on associe la fonction f continue sur $[0, \pi]$, définie par la formule :

$$x \in [0,\pi] \to f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\cos nx$$

On désigne par $\mathscr{A}$ l'application de $\mathbb{E}_0$ dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0,\pi]$ ainsi définie.

Rappeler pourquoi la fontion $\mathscr{A}(u)$ est continue sur $[0, \pi]$.

Pour tout $\alpha \geq 0$, on désignera par $\mathbf{A}_\alpha$ l'image de $\mathbb{E}_\alpha$ par $\mathscr{A}$.

1) *a :* Montrer que $\mathcal{A}$ est une application linéaire injective, et que sur $\mathbf{A}_0$, son isomorphisme réciproque $\mathcal{A}^{-1}$ est défini par les formules (1) de II.4.

b : Déduire que pour tout $\alpha \geq 0$, $\mathbf{A}_\alpha$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que l'application : $f \to \|f\|_\alpha = N_\alpha(\mathcal{A}^{-1}(f))$ est une norme sur $\mathbf{A}_\alpha$ vérifiant la condition : $\|f\|_\alpha \geq \sup_{x\in[0,\pi]} |f(x)|$

2) Soit $\alpha \geq 0$ et p la partie entière de α. Montrer que toute fonction de $\mathbf{A}_\alpha$ possède des dérivées continues sur $[0, \pi]$, jusqu'à l'ordre p.

3) Soit f une fonction continue réelle définie sur $[0, \pi]$ et y possédant des dérivées premières et secondes continues. Montrer que f appartient à $\mathbf{A}_0$.

4) *a :* Soit n un entier, $n > 0$. Montrer que la fonction $x \to \sin(nx)$ appartient à $\mathbf{A}_0$ et que sa norme dans $\mathbf{A}_0$ vaut : $\frac{4}{\pi}\sum_0^{n-1} \frac{1}{2k+1}$.

En étudiant l'intégrale $\int_0^n \frac{dx}{2x+1}$, donner un équivalent de cette norme.

b : Soit a un élément de $\mathbb{E}_1$ et g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par :

$$\forall\, x \in [0, \pi] \quad : \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a(n)\ \sin(nx)$$

Montrer que g est dans $\mathbf{A}_0$.

5) Soit $\alpha \geq 0$

a : Soit n et p deux entiers vérifiant $0 \leq p \leq n$. Montrer que la fonction $x \to \cos(px)\cos[(n-p)x]$ appartient à $\mathbf{A}_\alpha$ et que sa norme dans $\mathbf{A}_\alpha$ est inférieure ou égale à $(n+1)^\alpha$.

b : Soit f et g deux fonctions de $\mathbf{A}_\alpha$. On pose :

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)\cos(nx) \\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v(n)\cos(nx) \end{cases}$$

et pour tout $p \in \mathbf{N}$, on définit pour $x \in [0, \pi]$, la fonction B_p par :

$$B_p(x) = \sum_{k=0}^{p} u(k)v(p-k)\cos(kx)\cos((p-k)x)$$

Pour chaque x fixé dans $[0, \pi]$, $B_p(x)$ est le terme général d'une suite réelle. Montrer que cette suite est dans $\mathbb{E}_\alpha$. Etudier la série de terme général $\| B_p \|_\alpha$ et, en utilisant les résultats de la partie I.4), déduire que $f.g$ est dans $\mathbf{A}_\alpha$. Pour cela, il pourra être utile d'introduire la suite a_n image de la fonction B_p par $\mathcal{A}^{-1}$.

Montrer alors que $\| f.g \|_\alpha \leq \| f \|_\alpha . \| g \|_\alpha$.

6) Soit c une suite réelle telle que la série entière de terme général $c(n)x^n$ ait pour rayon de convergence l'infini. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $F(x) = \sum_{0}^{+\infty} c(n)x^n$.

Montrer que pour tout $\alpha \geq 0$ et tout $f \in \mathbf{A}_\alpha$, la fonction composée $F \circ f$ appartient à $\mathbf{A}_\alpha$.

7) Soit f une fonction continue réelle sur $[0, \pi]$. Prouver que f appartient à $\mathbf{A}_2$ si et seulement si elle vérifie les trois conditions :

1) Elle possède des dérivées premières et secondes continues.

2) $f'(0) = f'(\pi) = 0$

3) $f'' \in \mathbf{A}_0$

8) Soit F une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possèdant des dérivées continues jusqu'à l'ordre 4. Prouver que pour tout $f \in \mathbf{A}_2$, $F \circ f \in \mathbf{A}_2$.

FIN DE L'ENONCE